代数幾何学セミナーレジュメ

赤澤涼

2016 年 7 月 1 日

この文章について

今回は Bosch 本 [1] の 1.4 節『加群』について．本稿は発表を補足することを目的としているため, 教科書の訳稿としての性質を持っていない．すなわち, セクションの割り振りや定理, 定義等の番号は必ずしも教科書と 1 対 1 に対応していない．適宜省略あるいは追記した箇所も存在する．

1　加群

定義 1.1 (R **加群**)
R を環[*1]とする．集合 M に**加法** (addition) と呼ばれる演算 $M \times M \longrightarrow M, (a,b) \longmapsto a+b$ および**スカラー倍** (scalar multiplication) と呼ばれる演算 $R \times M, (\alpha, a) \longmapsto \alpha \cdot a$ が定義されていて以下を満たすとき, M を R **加群** (R**-module**) という：

1. M は加法に関してアーベル群をなす．
2. 任意の $\alpha, \beta \in R$ および $a, b \in M$ に対し, $(\alpha+\beta)\cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$. また, $\alpha \cdot (a+b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$. すなわち, 加法およびスカラー倍は分配法則を満たす．
3. 任意の $\alpha, \beta \in R$ および $a \in M$ に対し, $(\alpha \cdot \beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$. すなわち, スカラー倍は結合法則を満たす．
4. 任意の $a \in M$ および R の単位元 1 に対し, $1 \cdot a = a$.

加群はベクトル空間の自然な一般化となっている．体 K 上の加群とは K ベクトル空間のことである．また, 環 R の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ は R 加群だと考えることができる．実際 $\mathfrak{a}$ は R の加法により加法群とみなせ, $\mathfrak{a}$ における R の乗法をスカラー倍だとみなせばよい．特に, R 自身は R 加群である．また, アーベル群と $\mathbb{Z}$ 加群との間には 1 対 1 対応が存在する．すなわち, M を任意のアーベル群とし, $n \in \mathbb{Z}$ と $x \in M$ に対し, $n \cdot x = x + x + \cdots + x$ (x を n 個足し合わせる) と定義すれば $\mathbb{Z}$ 加群とみなせる．

[*1] 改めて注意をしておくと, この本では特に注意のない限り環といえば単位元を持つ可換環を指している．

定義 1.2 (R 加群の準同型)
R 加群 M, N に対し, 写像 $\varphi : M \longrightarrow N$ が以下を満たすとき, R 加群の準同型 (または加群であることが明らかであるときには単に R 準同型) であるという:

1. 任意の $x, y \in M$ に対し, $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$,
2. 任意の $r \in R$ および $x \in M$ に対し, $\varphi(rx) = r\varphi(x)$.

R 加群の mono-, epi-, iso-, endo-, および automorphisms は通常通り定義される.

定義 1.3 (R 代数)
R, A を環とする. A が (結合的, 可換, 単位元 1 を持つ) R **代数** (**R-algebra**) であるとは, (環であると同時に) R 加群の構造を持ち, 任意の $r \in R$ および $x, y \in A$ に対して以下を満たすことをいう:

$$r \cdot (x \cdot y) = (r \cdot x) \cdot y = x \cdot (r \cdot y).$$

ただし, " $\cdot$ " は A の環としての積およびスカラー倍を表す. R 代数の射 $A \longrightarrow B$ は A, B の環および加群の構造を保つ準同型である.

任意の環準同型 $f : R \longrightarrow A$ が与えられたとき, $r \in R$ と $x \in A$ に対し, $r \cdot x = f(r) \cdot x$ とすることにより, A を R 代数とみなすことができる. 逆に, 定義より, 任意の R 代数 A に対し, 環準同型

$$\begin{array}{cccc} f : & R & \longrightarrow & A \\ & r & \longmapsto & r \cdot 1_A \end{array}$$

が定義される. ここで 1_A は A の単位元で, A の R 代数としての構造と準同型 f が誘導する構造は一致する. 実際, 環 A に R 代数の構造を付加することは, 環準同型 $R \longrightarrow A$ を指定することにすぎない. 言い換えると, R 代数 A とは, 環 A と環準同型 $\varphi : R \longrightarrow A$ との組 (A, φ) のことである. この準同型は構造的と呼ばれる. この観点から考えると, 2 つの R 代数 (A, φ) と (B, ψ) との間の R 代数の準同型とは, 環準同型 $A \longrightarrow B$ であって, 以下の図式を可換にするものであるといえる:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] & & B \\ & R \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}.$$

加群の議論に戻って, 部分加群の概念を導入する.

定義 1.4 (部分 R 加群)
M を R 加群とする. 部分群 $N \subset M$ が**部分加群** (submodule) である, またはより正確に M の部分 R 加群であるとは, 任意の $r \in R$ および $x \in N$ に対し, $rx \in N$ であるときにいう. このとき実際に, N は M

より遺伝させた加法およびスカラー倍によって R 加群になっている.

例えば任意の環 R について, R を R 加群としてみたときの部分 R 加群は R のイデアルにほかならない.

注意 1.5
$\varphi : M \longrightarrow N$ を R 加群の準同型とする. このとき,

$$\ker\varphi := \{x \in M \mid \varphi(x) = 0\},$$

すなわち φ の**核**は M の部分 R 加群である. また,

$$\operatorname{im}\varphi := \varphi(M),$$

すなわち φ の**像**は N の部分 R 加群である.

M が R 加群, $N \subset M$ が部分 R 加群であるとする. ベクトル空間のときと同じように, **剰余加群** (residue class ring) M/N (または M の N による商) が定義できる. その元は $x \in M$ に対し $x + N$ という形の集合から成り, 以下の加法によってアーベル群を成す:

$$(x+N) + (y+N) = (x+y) + N, \quad x, y \in M.$$

また, 以下のスカラー倍によって R 代数とみなせる:

$$r(x+N) = (rx) + N, \quad r \in R, \quad x \in M.$$

これらの演算が well-defined であることは容易に確かめられる. また, 標準的な写像

$$\begin{array}{cccc} \pi : & M & \longrightarrow & M/N \\ & x & \longmapsto & x + N \end{array}$$

は R 加群の全射準同型であり, 以下の普遍性を満たす. すなわち,

命題 1.6
M を R 加群, N を M の部分 R 加群とする. R 代数の準同型 $\varphi : M \longrightarrow M'$ が $N \subset \ker\varphi$ を満たすならば, 図式

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & M' \\ M/N \arrow[ur, dashed, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする R 加群の準同型 $\varphi' : M/N \longrightarrow M'$ が一意的に存在する.

証明は略. さらにこのとき, φ' が単射であることと $N = \ker\varphi$ であることは同値であり, φ' が全射であることと φ が全射であることは同値である. したがって $N = \ker\varphi$ かつ φ が全射であるとき, φ' は M/N と M' との間に同型を与える. この命題の帰結として, 以下の**同型定理**と呼ばれる定理たちが得られる.

命題 1.7
N, N' を R 加群 M の部分加群とする．このとき標準的な準同型 $N \hookrightarrow N+N' \longrightarrow (N+N')/N'$ は明らかに全射であり, $N \cap N'$ が核である．したがって, 命題 1.6 より次の同型

$$N/(N \cap N') \xrightarrow{\sim} (N+N')/N'$$

が得られる．

命題 1.8
M を R 加群, $N \subset N' \subset M$ をそれぞれ部分加群であるとする．

1. 標準的な準同型 $N' \hookrightarrow M \longrightarrow M/N$ は明らかに N を核とし, 従って命題 1.6 より単射 $N'/N \hookrightarrow M/N$ を誘導する．これより, N'/N は M/N の部分加群であるとみなせる．
2. 標準全射準同型 $M \longrightarrow M/N'$ は M/N を経由するよう分解できる．すなわち, $M \xrightarrow{\pi} M/N \xrightarrow{f} M/N'$ と表せる．ここで f は R 加群の準同型, π は標準全射準同型である．
3. 上の f は明らかに全射で, N'/N を核とする．従って 1. および命題 1.6 より同型

$$(M/N)/(N'/N) \xrightarrow{\sim} M/N'$$

を得る．

続いて, 加群を構成する手法のいくつかを考察する．以下, M を R 加群とする．

(1) $(x_i)_{i \in I}$ を M の元の族とする．このとき,

$$\sum_{i \in I} Rx_i = \left\{ \sum_{i \in I} r_i x_i \,\middle|\, r_i \in R, \text{有限個の } i \in I \text{ を除いて } r_i = 0 \right\}$$

は M の部分加群となり, $(x_i)_{i \in I}$ によって**生成された** (generated) 部分加群という．これは x_i をすべて含む最小の部分加群である．R 加群 M が**有限生成** (finitely generated) もしくは**有限型** (finite type) であるとは, ある $x_1, \ldots x_n \in M$ が存在し, $M = \sum_{i=1}^n Rx_i$ と表せるときにいう．

(2) $(N_i)_{i \in I}$ を M の部分加群の族とする．このとき,

$$N = \sum_{i \in I} N_i = \left\{ \sum_{i \in I} x_i \,\middle|\, x_i \in N_i, \text{有限個の } i \in I \text{ を除いて } r_i = 0 \right\}$$

は M の部分加群となり, M の部分加群 N_i の**和** (sum) という．和が**直和** (direct sum) であるとは, 任意の $x \in N$ が, $x = \sum_{i_I} x_i$ と $x_i \in N_i$ を用いて一意に表わされるときにいい,

$$N = \bigoplus_{i \in I} N_i$$

と書く.

(3) $(M_i)_{i\in I}$ を R 加群の族とする. このとき, カルテジアン積[*2]

$$\prod_{i\in I} M_i$$

は成分ごとの和, スカラー倍を考えることで R 加群となり, M_i の**直積** (direct product) という. $j \in J$ と部分加群 M_j に対して,

$$\prod_{i\in I} N_i \subset \prod_{i\in I} M_i, \quad ただし, N_i = \begin{cases} M_j & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

と考えれば M_j を $\prod_{i\in I} M_i$ の部分加群であるとみなせる. これらの部分加群の和は**直和**と呼ばれ, 以下のように表せる:

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \;\middle|\; 有限個の\ i \in I\ を除いて\ x_i = 0 \right\}.$$

これによって任意の R 加群の族に対して直和を定義できるが, これは必ずしも M の部分加群とはならない. この構成は構成的または M_i の外部直和と呼ばれる. 例として, $R^{(I)} = \bigoplus_{i\in I} R$ は, いくつかの R のコピーを添字集合 I の (濃度の) 分だけ直和したものである. さらに, I が有限集合のときは $\bigoplus_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i$ がわかる.

(4) R 加群 M, N に対して, 集合 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ を M から N への R 加群の準同型全体と定めるとこれは再び R 加群となる. 実際, N の R 加群としての構造を用いて, 任意の写像 $M \longrightarrow N$ の和が, 同様にスカラー倍[*3]が well-defined に定まる. さらに, 任意の R 加群の準同型 $\gamma : M' \longrightarrow M$ は, R 加群の準同型

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M',N) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ \gamma \end{array}$$

を誘導する. また, 任意の R 加群の準同型 $\delta : N \longrightarrow N''$ は, R 加群の準同型

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M,N'') \\ \varphi & \longmapsto & \delta \circ \varphi \end{array}$$

を誘導する. 例えば, M の部分加群の族 $(M_i)_{i\in I}$ を考える. このとき, 包含写像 $\iota_i : M_i \hookrightarrow M$ は, R 加群の準同型

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathrm{Hom}_R(M,N) & \longrightarrow & \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i,N) \\ & \varphi & \longmapsto & (\varphi \circ \iota_i)_{i\in I} \end{array}$$

を決定する. Φ は, 任意の R 加群 N に対して, M が部分加群 $M_i \subset M$ の直和になっているときに同型を与えることが容易に確認できる. さらに, 包含写像 ι_i を任意の R 準同型に取り替えることができ, Φ が任意の N について同型を与えるならば, それは自動的に単射となる. 逆に, この性質が直和の普遍性による特徴付けを与える. すなわち, R 加群の族 $(M_i)_{i\in I}$ の直和は, R 加群 M と R 加群の準同型 $\iota_i : M_i \longrightarrow M$ (必然的にこれは単射) に対し, これにより誘導された R 加群の準同型 Φ を任意の R 加群 N について全単射にする. 言い換えれば, 任意の R 加群 N と任意の R 代数の準同型 $\varphi_i : M_i \longrightarrow N, i \in I$ に対し, R 代数の準同型 $\varphi : M \longrightarrow N$

[*2] 通常の集合としての直積. デカルト積とも.
[*3] スカラー倍は R が可換環でないと必ずしも定義できない.

が $\varphi \circ \iota_i = \varphi_i$ を任意の $i \in I$ について満たすように一意的に定まる．一般的な直和の普遍性は以下の命題によって述べられる．

命題 1.9 (直和の普遍性)
$(M_i)_{i\in I}$ を R 加群の族とする．また, $\iota_i : M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$ を, $\iota_i(x)$ は第 i 成分のみ x, その他の成分はすべて 0 となる準同型とする．任意の R 加群 N に対して,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\right) & \longrightarrow & \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N) \\ f & \longmapsto & (f\circ\iota_i)_{i\in I} \end{array}$$

は全単射である．すなわち, 任意の R 加群 N と任意の R 加群の準同型 (の族) $f_i : M_i \longrightarrow N$ に対し, 図式

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[d, dashed, "f"] \\ & N \end{tikzcd}$$

を可換にする準同型 $f : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow N$ が一意に定まる．

証明
$(f_i)_{i\in I}$ に対して, $f : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow N$ を,

$$f\left((x_i)_{i\in I}\right) := \sum_{i\in I} f_i(x_i)$$

と定める．有限個の $i \in I$ を除き $x_i = 0$ であったので, これは well-defined である．このとき, $x \in M_j$ に対して,

$$f(\iota_j(x)) = \sum_{i\in I} f_i(x_i) = f_j(x) + \sum_{i\neq j} f_i(0) = f_j(x)$$

となり, 可換性を満たすので, 存在がいえた．続いて, ある準同型 $g : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow N$ が f と同様の条件を満たすとすと,

$$g\left((x_i)_{i\in I}\right) = g\left(\sum_{i\in I} \iota_i(x_i)\right) = \sum_{i\in I} g(\iota_i(x_i)) = \sum_{i\in I} f_i(x_i) = f\left((x_i)_{i\in I}\right)$$

となるので, 一意性もわかる．　□

命題 1.9 は直和を特徴付ける．ある R 加群 S と R 加群の準同型の族 $\iota' : M_i \longrightarrow S$ が, $\bigoplus_{i\in I} M_i$ と同じ普遍性を満たす, すなわち, 「任意の R 加群 N に対して,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(S, N) & \longrightarrow & \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N) \\ f & \longmapsto & (f\circ\iota'_i)_{i\in I} \end{array}$$

は全単射」を満たすとすると, 同型写像 $g : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow S$ で, $g \circ \iota_i = \iota'$ を満たすものが存在することが分かる.

(5) $\mathfrak{a} \subset R$ をイデアルとする. このとき,

$$\mathfrak{a}M = \left\{ \sum_{i=0}^{<\infty} a_i x_i \;\middle|\; a_i \in \mathfrak{a}, x_i \in M \right\}$$

は M の部分加群である. これは $a_i \in \mathfrak{a}, x_i \in M$ なる a, x のすべての積から生成された部分加群である.

(6) $(M_i)_{i\in I}$ を M の部分加群の族とすると, その共通部分

$$\bigcap_{i\in I} M_i$$

は M の部分加群である.

定義 1.10 (自由加群)
M を R 加群とする. M の元の族 $(x_i)_{i\in I}$ が**自由** (free) であるとは, 有限個の $i \in I$ を除いて $a_i = 0$ を満たす $a_i \in R$ に対して, $\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$ であるならば, 任意の $i \in I$ について $a_i = 0$ であるときにいう. また, R 加群 M が**自由** (free) であるとは, 自由な生成系を持つことである. すなわち, 任意の $x \in M$ に対して, ある非零な元の族 $(x_i)_{i\in I}$ が存在して,

$$x = \sum_{i\in I} a_i x_i$$

と $a_i \in R$ を用いて一意的に表せることである. ただし, 有限個の $i \in I$ を除いて $a_i = 0$. これは, M が $M^{\oplus I}(= \bigoplus_{i\in I} M_i,$ ただし任意の $i \in I$ に対して $M_i = M)$ と同型であることにほかならない.

加群の自由生成系はちょうどベクトル空間の基底に対応する. 例えば, ある $n \in \mathbb{N}$ に対する R^n, または, ある添字集合 I に対する $R^{(I)}$ は「単位ベクトル (第 i 成分のみ 1 で他は 0) 」を自由生成系に持つ自由 R 加群である. すべての K 上のベクトル空間は自由 K 加群である. しかし, 他の多くの加群の場合, 自由生成系を持たず, したがって自由ではない. また, 自由加群の部分加群も自由であるとは限らない. 例えば, 体 K 上の二変数多項式環 $K[X, Y]$ を考えよう. このとき, $K[X, Y]$ は自由加群である. イデアル $\mathfrak{a} \subset K[X, Y]$ が $K[X, Y]$ の自由部分加群であることと, $\mathfrak{a}$ が単項生成イデアルであることは同値である. 実際, もし $\mathfrak{a} = (a)$ であるならば, これは $\mathfrak{a}$ の自由生成系を定めている. $a = 0$ ならば $\mathfrak{a}$ は零加群であり, このときは空集合が自由生成系であると考える. 一方, $\mathfrak{a}$ が単項生成でないとすると, $\mathfrak{a}$ の任意の生成系は少なくとも 2 つの元 $f, g \neq 0$ を含み, $gf - fg = 0$ が成り立ってしまうため, $\mathfrak{a}$ は自由加群にならない.

次の補題は重要である.

補題 1.11 (中山の補題)
M を有限生成 R 加群, $\mathfrak{a}$ をジャコブソン根基 $j(R)$ に含まれる R のイデアルとする. このとき, $\mathfrak{a}M = M$ ならば $M = 0$.

証明
$M \neq 0$ と仮定する. M が有限生成であることから, 最小の生成系 $x_1, \ldots x_n \in M$ をとれる. また, $x_n \in M = \mathfrak{a}M$ なので,

$$x_n = a_1 x_1 + \cdots a_n x_n$$

と, $a_i \in \mathfrak{a}$ を用いて表せる. したがって,

$$(1 - a_n)x_n = a_1 x_1 + \cdots a_{n-1} x_{n-1}$$

となる. $a_n \in \mathfrak{a}$ であるから, 1.3 節で示した命題より, $1 - a_n$ は R の単元である. ゆえに $x_n \in \sum_{i=1}^{n-1} R x_i$, すなわち, x_n は $x_1, \ldots x_{n-1}$ で生成される部分加群に属する. これは $x_1, \ldots x_n$ が最小の基底であることに矛盾する. □

系 1.12
M を有限生成 R 加群, $\mathfrak{a}$ をジャコブソン根基 $j(R)$ に含まれる R のイデアルとする. このとき, 部分加群 $N \subset M$ が $M = N + \mathfrak{a}M$ を満たすならば, $M = N$.

証明
$M = N + \mathfrak{a}M$ は, $M/N = \mathfrak{a}(M/N)$ を意味する. したがって, M は有限生成であったから, 中山の補題より, $M/N = 0$. すなわち $M = N$. □

系 1.13
R は唯一の極大イデアル $\mathfrak{m} \subset R$ を持つ局所環であるとする. このとき, 任意の有限生成 R 加群 M に対し, $M/\mathfrak{m}M$ は体 $R/\mathfrak{m}$ 上のベクトル空間である. さらに, $x_i, \ldots x_n \in M$ の属する剰余類 $\bar{x}_1, \ldots \bar{x}_n \in M/\mathfrak{m}M$ がこのベクトル空間を生成していたとすると, $M = \sum_{i=1}^{n} R x_i$. すなわち, $x_1, \ldots x_n$ は M を生成する.

証明
$M/\mathfrak{m}M$ は $\mathfrak{m}$ によって零化されるので, $R/\mathfrak{m}$ 加群とみなすことができる. すなわち $R/\mathfrak{m}$ ベクトル空間である. また, $M/\mathfrak{m}M = \sum_{i=1}^{n} R/\mathfrak{m}\bar{x}_i$ より,

$$M = \sum_{i=1}^{n} R x_i + \mathfrak{m}M$$

を得る. 系 1.12 より, $M = \sum_{i=1}^{n} R x_i$. □

参考文献

[1] Siegfried Bosch, “Algebraic Geometry and Commutative Algebra”, Springer, 2012.
[2] Miles Reid, “Undergraduate Commutative Algebra”, Cambridge University Press, 1995.
[3] M.F.Atiyah, I.G.Macdonald, 新妻弘訳, 『可換代数入門』, 共立出版, 2006.

[4] 志甫淳, 『層とホモロジー代数』, 共立出版, 2016.
[5] 雪江明彦, 『代数学 2 環と体とガロア理論』, 日本評論社, 2010.