# 環のスペクトラム

赤澤涼 *

2017 年 4 月

## 目次



## 1 圏と関手

数学的な対象—直積や直和, 核や余核など—を考える際, 対象そのもののもつ性質の代わりに, その対象が他の対象との間にどのような射をどのようにもつのか, を考えることがある. 実際, 普遍性と呼ばれる性質によってこれらの対象を特徴付けることができるのであった. 本節ではこのような, 対象と射の関係を様々な理論体系のなかで統一的に扱える枠組みである圏と関手についての基本的な事項を述べる. ただし, 主に今後用いる用語の定義や簡単な例のうち必要最低限のものを挙げるにとどめ, さらなる応用に用いられる性質等は, 必要となったときに都度述べることにする. あるいは [1] など適当な圏論の教科書を参照されたい. 有名な Web サイトも存在する.

### 1.1 圏

圏は「集合すべての集まり」など大きなものを考えるが, 集合全体の集合を考えると矛盾が起きてしまう (ラッセルのパラドックス) ことはよく知られている. そのため,「宇宙」と呼ばれる集合を定義し, ある宇宙に含まれる「小さな (small) 」集合のみを考えることでこの問題を回避するのが常套手段である. 本稿では, 常にこのような「小さな」集合のみを扱うことにし, 宇宙についての細かい議論は省略する.

> **定義 1.1**
> **圏** (category) とは, 次のデータ,
>
> - **対象** (object) の集まり $\mathrm{obj}\,\mathcal{C}$,

* http://www.rakazawa.com/

- 任意の対象 $X, Y \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$ に対して, **射** (morphism) の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$,
- 任意の対象 $X, Y, Z \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$ に対して, 射の**合成** (composition)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ f, \end{array}$$

- 任意の $X \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$ に対して, **恒等射** (identity) $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$

の組であり, $f \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_X \circ f = f$ および, 射の合成について結合法則 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ を満たすものをいう.

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が集合であることを要請しないこともある. その場合, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が集合になるような圏のことは locally small な圏と呼ぶ.

**例 1.2**
次のような, 構造の入った集合を対象, その間の構造を保つ対応付けを射とするような圏を**具体圏**といい, 今後も重要となる.

- 対象は集合, 射は写像から成る集合の圏 **Sets**.
- 対象はアーベル群, 射は群準同型から成るアーベル群の圏 **Ab**.
- 対象は可換環, 射は環準同型から成る可換環の圏 **Ring**.
- 対象は位相空間, 射は連続写像から成る位相空間の圏 **Top**.
- 対象は位相空間 $X$ の開集合, 射は包含写像のみから成る位相空間の圏 $\mathbf{Opn}(X)$.

## 1.2　関手と自然変換

**定義 1.3**
圏 $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への**関手** (covariant functor) $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ とは,

- $X \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$ に対して, $F(X) \in \mathrm{obj}\,D$ を定める写像 $F$,
- $X, Y \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$ と, 任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対し, $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ を定める写像の族 $F_{X,Y}$

の組であり, $X, Y, Z \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ に対して, $F_{X,X}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$, $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ を満たすものをいう.

上の関手を**共変関手** (covariant functor) ともいう. $F(X)$ を $FX$, $F(f)$ を $Ff$ などとも表す.

**定義 1.4**
圏 $\mathcal{C}$ に対し, 圏 $\mathcal{C}^\circ$ を $\mathrm{obj}\,\mathcal{C}^\circ := \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ で定義し, $\mathcal{C}$ の**反対圏** (opposite category) という. また, 共変関手 $F\colon \mathcal{C}^\circ \longrightarrow \mathcal{D}$ を, 圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への**反変関手** (contravariant functor) という.

反変関手とは, 射の向きを変えるような関手のことである. $F$ が圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への関手であることを, すでに用いた $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ や $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ などの記法を用いて表す.

**定義 1.5**
$F, G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への関手とする. このとき, $F$ から $G$ への**自然変換** (natural transformation) とは, 射の族 $\alpha = (\alpha_X\colon F(X) \longrightarrow G(X))_{X\in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}}$ であって, 任意の $\mathcal{C}$ の射 $f\colon X \longrightarrow Y$ について, $G(f)\circ\alpha_X = \alpha_Y \circ F(f)$ が成り立つときにいう.

すなわち, 自然変換とは関手から関手への射のことである.

# 2　環のスペクトラムとその位相的性質

以降「環」という言葉は, 特に注釈のない限り, 単位元を持つ (通常 1 と書き表す) 可換環を指すものとする. $A$ を環としよう. 集合として, $A$ の**素スペクトラム** (prime spectrum) $\mathrm{Spec}\,A$ を, $A$ の素イデアル全体と定義する. 誤解の恐れのないときには, 単にスペクトラムともいう. 一般のスキームの局所構造として, **アフィンスキーム**を構成していくわけだが, そのためには $\mathrm{Spec}\,A$ の性質を観察することが欠かせない. まずは, $\mathrm{Spec}\,A$ に閉集合と開集合の概念を与え, 位相空間にするところから始める.

## 2.1　$\mathrm{Spec}\,A$ 上の Zariski 位相

**定義 2.1**
$A$ を環, $\mathrm{Spec}\,A$ を $A$ の素スペクトラムとする. 部分集合 $Y \subset \mathrm{Spec}\,A$ が $Y$ の**閉**集合であるとは, ある $A$ の部分集合 $E \subset A$ が存在し,

$$Y = V(E) = \{\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,A \mid E \subset \mathfrak{p} \,\}$$

の形に表せるときにいう. また**開**集合であるとは, その補集合が上述した意味で閉集合であるときにいう.

ある $\mathrm{Spec}\,A$ の元について, 点として捉えることを強調したいときには $x$ などを用いて表し, $A$ の素イデアルであることを強調したいときには, $x$ の代わりに $\mathfrak{p}_x$ などと表す. 表記方法の違いだけで, どちらも完全に同じものである. 次の例に挙げるような方法で, 任意の環 $A$ の元を $\mathrm{Spec}\,A$ 上の "関数" だと解釈する.

**例 2.2**
$a \in \mathbb{C}$ とする. 多項式環 $\mathbb{C}[x]$ において, $a$ で "消える" 多項式の全体は, $\mathbb{C}[x]$ の極大イデアル $\mathfrak{m} = (x-a)$ となり, $\mathbb{C}$ 上の点は $\mathbb{C}[x]$ の極大イデアルと 1 対 1 に対応するのであった. $\mathbb{C}[x]$ の極大イデアル全体を $M = \mathrm{Spm}\,\mathbb{C}[x]$ とする. $M$ の任意の点 $\mathfrak{m} = (x-a)$ に対して, 同型

$$\mathbb{C}[x]/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

が存在する. このとき, $\mathbb{C}[x]/\mathfrak{m}$ における $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ の像 $\overline{f}$ は $f(a) \in \mathbb{C}$ に写される. よって, 剰余体 $\mathbb{C}[x]/\mathfrak{m}$ において, 剰余類,

$$f(\mathfrak{m}) := \overline{f}$$

を, 自然に $f$ の $\mathfrak{m}$ における "値" とみなすことができる.

一般の環 $A$ についても上の例に倣い, $A$ の元 $f$ を $\operatorname{Spec} A$ 上の関数とみなす. $f \in A$, $x \in \operatorname{Spec} A$ に対し, $f(x)$ を $f$ の剰余環 $A/\mathfrak{p}_x$ における剰余類 (標準的な全射による像) と定義すれば, $f \in A$ は関数,

$$f\colon \operatorname{Spec} A \longrightarrow \coprod_{x \in \operatorname{Spec} A} A/\mathfrak{p}_x$$

であると解釈できる. このとき, $f(x) = 0$ と $f(x) \neq 0$ はそれぞれ $f \in \mathfrak{p}_x$ および $f \notin \mathfrak{p}_x$ と同値である. この記法を用いれば, $Y \subset \operatorname{Spec} A$ が閉集合であることは,

$$Y = V(E) = \{\, \mathfrak{p}_x \in \operatorname{Spec} A \mid \text{すべての } f \in E \text{ に対し}, f(x) = 0 \,\}$$

なる部分集合 $E \subset A$ が存在すること, ということもできる. $\operatorname{Spec} A$ の閉集合とは, その上の関数 (すなわち, $\mathfrak{a}$ の元) の共通零点である.

$\mathfrak{p}_x$ は素イデアルなので, $f, g \in A$ について, $(fg)(x) = 0$ は, $f(x) = 0$ または $g(x) = 0$ と同値である. また, 任意の $f \in A$ について,

$$\begin{aligned} V(f) &= \{\, x \in \operatorname{Spec} A \mid f(x) = 0 \,\}, \\ D(f) &= \operatorname{Spec} A \setminus V(f) \\ &= \{\, x \in \operatorname{Spec} A \mid f(x) \neq 0 \,\} \end{aligned}$$

と定める[*1]. $X = \operatorname{Spec} A$ について議論していることを強調したいときには, $D(f)$ の代わりに $D_X(f)$ などとも表す.

**注意 2.3**

$E \subset A$, $\mathfrak{a}$ を $E$ が生成するイデアルとすると, $V(E) = V(\mathfrak{a})$ である. 実際, $V(E) \supset V(\mathfrak{a})$ は明らか. $\mathfrak{p} \in V(E)$ とする. 任意の $f \in \mathfrak{a}$ をとると, $f$ は $E$ の元の $A$ 係数の線形結合で表される. $\mathfrak{p}$ は $A$ の (素) イデアルであり, $E \subset \mathfrak{p}$ であるから, $f \in \mathfrak{p}$ となり, $V(E) \subset V(\mathfrak{a})$ もわかる. 以降, $V(E)$ の代わりに $V(\mathfrak{a})$ を主に用いて議論する.

次に, 上述の閉集合が実際に位相を定めることを確認する.

**命題 2.4**

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ を $A$ の任意のイデアルとする. このとき, 以下が成り立つ.

1. $\operatorname{Spec} A = V(0)$, $\emptyset = V(1)$.
2. $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(\mathfrak{a}_\lambda) = V\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{a}_\lambda\right)$
3. $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.

**証明**　1. 明らか.

2. $\mathfrak{p} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(\mathfrak{a}_\lambda)$ は, 任意の $\lambda \in \Lambda$ について $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}_\lambda)$ と同値であり, これは任意の $\lambda \in \Lambda$ について $\mathfrak{a}_\lambda \subset \mathfrak{p}$ と同値である. $\sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{a}_\lambda$ は $\mathfrak{a}_\lambda$ すべてを含む最小のイデアルであるから, これはさらに $\sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{a}_\lambda \subset \mathfrak{p}$ と同値であり主張が従う.

[*1] ここで "$D$" を用いるのは, $f$ の "domain" という気持ちがあるからである.

3. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ または $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ のとき, $\mathfrak{ab} \subset \mathfrak{p}$ は明らか. 逆に, $\mathfrak{ab} \subset \mathfrak{p}$ かつ $\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{p}$ であるとすると, ある $\mathfrak{b}$ の元 $b$ が存在して, $b \notin \mathfrak{b}$. しかし, 任意の $a \in \mathfrak{a}$ について, $ab \in \mathfrak{p}$ であり, $\mathfrak{p}$ が素イデアルであることから, $a \in \mathfrak{p}$ を得る.

□

**系 2.5**
ある $A$ のイデアル $\mathfrak{a}$ について, $V(\mathfrak{a})$ の形の集合を**閉**集合とする位相が $\operatorname{Spec} A$ 上に定まる. この位相を, $\operatorname{Spec} A$ 上の **Zariski 位相**という. また, ある $f \in A$ について $D(f)$ の形の集合は, Zariski 位相の**開**基を成す.

**証明** 前半は命題 2.4 から明らか. $U$ を $\operatorname{Spec} A$ の任意の開集合とすると, その補集合は, あるイデアル $\mathfrak{a} \subset A$ を用いて $V(\mathfrak{a})$ の形に表される. このとき,

$$V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} V(f)$$

より, 補集合をとって,

$$U = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f)$$

である. □

**例 2.6**
Spec の例を挙げる.

1. 零環 0 について, $\operatorname{Spec} 0 = \emptyset$.
2. $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{(0), (p)\}$. ただし $p$ は正の素数.
3. $k$ を代数閉体, $a \in k$ とすると, $X = \operatorname{Spec} k[x] = \{ (0), (x-a) \}$. 形式的に $* = \{ (0) \}$, $a = (x-a)$ と考えれば, $X = \{*\} \cup k$ である. $X$ の開集合は $\emptyset$, $X$, および $\{*\}$ と有限個の $a_1, \ldots a_s \in k$ の和集合である. 従って, 空でない開集合の共通部分は空でない. すなわち, $X$ における Zariski 位相は一般に Hausdorff の分離公理を**満たさない**. また, $\{*\}$ の閉包は $X$ 全体である. このような点を $X$ の**生成点** (generic point) という.

## 2.2 イデアル

再び $A$ を任意の環とする. ここまで, イデアル $\mathfrak{a} \subset A$ に対し, その零点集合 $V(\mathfrak{a})$ を考えた. この写像 $V(\cdot)$ の “逆” を考えたい.

**定義 2.7**
$Y \subset X = \operatorname{Spec} A$ とする.

$$I(Y) = \{ f \in A \mid \text{すべての } y \in Y \text{ に対し, } f(y) = 0 \}$$

と定め, $I(Y)$ を $Y$ のイデアルという.

ここで条件「$f(y)=0$」は,「$f\in\mathfrak{p}_y$」と同値であるから, $I(\{y\})=\mathfrak{p}_y$ であり,

$$I(Y)=\bigcap_{y\in Y}\mathfrak{p}_y$$

である.

**補題 2.8**
$A$ を環とする.

1. $Y\subset Y'\subset\operatorname{Spec}A$ に対し, $I(Y)\supset I(Y')$.
2. $I(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}I(Y_\lambda)$.

**証明** $I(\cdot)$ の定義より明らか. □

**命題 2.9**
$A$ を環とする.

1. $E\subset A$ に対して, $I(V(E))=\operatorname{rad}(E)$. 特に, $\operatorname{rad}(\mathfrak{a})=\mathfrak{a}$ なるイデアル $\mathfrak{a}\subset A$ に対しては, $I(V(\mathfrak{a}))=\mathfrak{a}$.
2. $Y\subset\operatorname{Spec}A$ に対して, $V(I(Y))=\overline{Y}$. 特に, 閉集合 $Y\subset\operatorname{Spec}A$ に対しては, $V(I(Y))=Y$. なお, いずれも $\operatorname{Spec}A$ には Zariski 位相をいれて考えている.

**証明** $\mathfrak{a}$ を, $E$ が生成するイデアルとする. このとき,

$$I(V(E))=\bigcap_{y\in V(E)}\mathfrak{p}_y=\bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}A\\ E\subset\mathfrak{p}}}\mathfrak{p}=\bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}A\\ \mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}}}\mathfrak{p}$$

であるが,

$$\bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}A\\ \mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}}}\mathfrak{p}=\operatorname{rad}(\mathfrak{a})=\operatorname{rad}(E)$$

であるので, 1. が従う. なお, $\operatorname{rad}(\mathfrak{a})=\mathfrak{a}$ を満たすイデアルを根基イデアルという.

次に, $I(Y)$ は $Y$ で消える多項式全体のことであるから, $Y\subset V(I(Y))$ は明らかである. また, $\overline{Y}$ は $Y$ を含む最小の閉集合, すなわち $Y\subset V(\mathfrak{a})\subset\operatorname{Spec}A$ なる $V(\mathfrak{a})$ たちの共通部分であるから, $\overline{Y}\subset V(I(Y))$ もわかる. $V(I(Y))=\overline{Y}$ を示すためには, $Y\subset V(\mathfrak{a})$ から $V(I(Y))\subset V(\mathfrak{a})$ がいえればよい. 実際, このとき $\mathfrak{a}\subset I(Y)$ であるから, $V(\mathfrak{a})\supset V(I(Y))$ である. □

**系 2.10**
$A$ を環, $X=\operatorname{Spec}A$ をそのスペクトラムとする.

1. $x\in X$ について, $\overline{\{x\}}=V(\mathfrak{p}_x)$. すなわち, $x\in X$ の閉包は $\mathfrak{p}_x\subset\mathfrak{p}_y$ であるような $y\in X$ からなる.
2. 点 $x\in X$ が $X$ の閉集合であることは, $\mathfrak{p}_x$ が $A$ の極大イデアルであることと同値である.

**系 2.11**
$A$ を環, $X = \operatorname{Spec} A$ をそのスペクトラムとする．このとき $X$ の閉集合と $A$ の根基イデアルとの間には, 包含関係を逆転する 1 対 1 対応が存在する．

**証明** 命題 2.9 から明らかである． □

**命題 2.12**
$X = \operatorname{Spec} A$ は, Zariski 位相について Kolmogorov 空間である．

**証明** $x$ と $y$ が異なる点であることは, $\mathfrak{p}_x \neq \mathfrak{p}_y$, すなわち $\mathfrak{p}_x \not\subset \mathfrak{p}_y$ または $\mathfrak{p}_y \not\subset \mathfrak{p}_x$ と同値である．$\mathfrak{p}_x \not\subset \mathfrak{p}_y$ とすると, $y \notin V(\mathfrak{p}_x) = \overline{\{x\}}$ であるので, $X \setminus \overline{\{x\}}$ は $y$ を含むが $x$ を含まない開集合である． □

系 2.5 より, ある $f \in A$ について $D(f)$ の形に表される開集合は, Zariski 位相の開基をなすのであった．また, 開集合は有限個の共通部分を取る操作で閉じていて, $D(f) \cap D(f') = D(ff')$ となることも既にみた．また, $D(f)$ という集合を表す $f \in A$ は一意的でないことにも注意する．しかし, 命題 2.9 から, $V(f) = V(f')$ と $\operatorname{rad}(f) = \operatorname{rad}(f')$ は同値であるので, 次が分かる:

**注意 2.13**
$f, f' \in A$ について, 以下は同値.

1. $D(f) = D(f')$.
2. $\operatorname{rad}(f) = \operatorname{rad}(f')$.

さらに, 次の性質が成り立つ.

**命題 2.14**
$A$ を環, $X = \operatorname{Spec} A$ をそのスペクトラムとする．このとき, 任意の $g \in A$ に対し, $D(g) \subset X$ は準コンパクトである．特に, $D(1) = X = \operatorname{Spec} A$ は準コンパクトである．ここで, 準コンパクト集合とは通常のコンパクト性の条件を満たすが, Hausdorff の分離公理を満たさないような集合を指している．

**証明** $D(f)$ の形の開集合は開基をなすのであったから, $D(g)$ の任意の開被覆のうち, $D(f)$ の形の開集合たちが覆っているような場合に, 有限部分被覆がとれることを示せばよい．そこで, $D(g) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D(f_\lambda)$ と仮定する．ただし, $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は $A$ の任意の元の族である．$X$ で補集合をとれば,

$$V(g) \supset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(f_\lambda) = V(\mathfrak{a})$$

となる．ただし, $\mathfrak{a}$ は $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が生成する $A$ のイデアルである．命題 2.9 から, $\operatorname{rad}(g) \subset \operatorname{rad}(\mathfrak{a})$ であるので, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して, $g^n \in \mathfrak{a}$. よって, ある添字 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \Lambda$ と係数 $a_1, a_2, \ldots, a_r \in A$ が存在して, $g^n = \sum_{i=1}^r a_{\lambda_i} f_{\lambda_i}$. 従って, $(g^n) \subset (f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, \ldots, f_{\lambda_r})$ であり,

$$V(g) = V(g^n) \supset V(f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, \ldots, f_{\lambda_r})$$

である．よって,

$$D(g) \subset D(f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, \dots, f_{\lambda_r}) \subset \bigcup_{i=1}^{r} D(f_{\lambda_i})$$

が得られる． □

**命題 2.15**
$A$ を環, $\mathfrak{a} \subset A$ をイデアル, $\pi\colon A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ を自然な全射とする．このとき, 写像,

$$\begin{array}{rccc} {}^a\pi\colon & \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} & \longrightarrow & \operatorname{Spec} A \\ & \mathfrak{p} & \longmapsto & \pi^{-1}(\mathfrak{p}) \end{array}$$

は $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} V(\mathfrak{a})$ という同相を誘導する．なお, $V(\mathfrak{a})$ には $\operatorname{Spec} A$ 上の Zariski 位相に誘導される位相をいれて考える．

**証明** ${}^a\pi$ が $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ と $V(\mathfrak{a})$, すなわち $\mathfrak{a}$ を含む $A$ のすべての素イデアルとの間の全単射であることは明らか．またこの同一視のもとで, $f \in A$ に対し,

$$\operatorname{Spec} A \supset D(f) \cap V(\mathfrak{a}) = D(\pi(f)) \subset \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$$

であるが, $\pi$ は全射なので, $D(\pi(f)) = D(\overline{f}) \subset \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ は $D(f) \cap V(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Spec} A$ に対応している．以上より主張が示された． □

**系 2.16**
環 $A$ について, そのスペクトラム $X = \operatorname{Spec} A$ と $A/\mathfrak{N}(A)$ のスペクトラム $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{N}(A)$ の間には自然な同相が存在する．ただし, $\mathfrak{N}(A)$ は環 A のべき零根基 (nilradical) である．

**証明** $\mathfrak{N}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p}$ であったから, $V(\mathfrak{N}(A)) = \operatorname{Spec} A$．よって, 命題 3.1 よりよい． □

# 3 スペクトラムの関手的性質

$\varphi\colon A \longrightarrow A'$ を環準同型とする．このとき, $\varphi$ は任意のイデアル $\mathfrak{p} \subset A'$ に対して自然に単射

$$A/\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \hookrightarrow A'/\mathfrak{p}$$

を誘導する．$\mathfrak{p}$ が素イデアルならば $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ も素イデアルになるのであった．これより次が従う:

**命題 3.1**
任意の環準同型 $\varphi\colon A \longrightarrow A'$ は, 写像

$$\begin{array}{rccc} {}^a\varphi\colon & \operatorname{Spec} A' & \longrightarrow & \operatorname{Spec} A \\ & \mathfrak{p}_x & \longmapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{p}_x) \end{array}$$

を誘導する．

${}^a\pi$ を環準同型 $\varphi$ の同伴写像と呼ぶ.

**補題 3.2**
命題 3.1 の状況において, 任意の $x \in \operatorname{Spec} A'$ に対し, 準同型 $\varphi_x \colon A/\varphi^{-1}(\mathfrak{p}_x) \hookrightarrow A'/\mathfrak{p}_x$ で, 次の図式を可換にするものが存在する:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ A/\varphi^{-1}(\mathfrak{p}_x) \arrow[r, hook, "\varphi_x"'] & A'/\mathfrak{p}_x. \end{tikzcd}$$

特に, $f \in A$, $x \in \operatorname{Spec} A'$ に対して,

$$\varphi_x(f({}^a\varphi(x))) = \varphi(f)(x)$$

が成り立つ. すなわち, $f \circ {}^a\varphi = \varphi(f)$.

**証明** 写像 ${}^a\varphi \colon \operatorname{Spec} A' \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ の構成から明らか. □

**命題 3.3**
$\varphi \colon A \longrightarrow A'$ を環準同型, ${}^a\varphi \colon \operatorname{Spec} A' \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ をそれに付随する写像とする. このとき,

1. $E \subset A$ に対して, $({}^a\varphi)^{-1}(V(E)) = V(\varphi(E))$.
2. $\mathfrak{a}' \subset A'$ をイデアルとするとき, $\overline{{}^a\varphi(V(\mathfrak{a}'))} = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}'))$.

**証明** $x \in \operatorname{Spec} A'$ に対して, $x \in ({}^a\varphi)^{-1}(V(E))$ であることは ${}^a\varphi(x) \in V(E)$ と同値である. 従って, 任意の $f \in E$ に対し $f({}^a\varphi(x)) = 0$ となる. これはさらに補題 3.2 から $\varphi(f)(x) = 0$ と同値であるから, $x \in ({}^a\varphi)^{-1}(V(E))$ は $x \in V(\varphi(E))$ と同値である.

命題 2.9 より, $\mathfrak{a} = I({}^a\varphi(V(\mathfrak{a}')))$ ならば, $\overline{{}^a\varphi(V(\mathfrak{a}'))} = V(\mathfrak{a})$. ここで $f \in \mathfrak{a}$ は, $f$ が ${}^a\varphi(V(\mathfrak{a}'))$ 上で消える多項式であることと同値であり, また補題 3.2 から, $\varphi(f)$ が $V(\mathfrak{a}')$ 上で消えることと同値である. よってこのとき, $\varphi(f) \in I(V(\mathfrak{a}')) = \operatorname{rad}(\mathfrak{a}')$ となる. 従って, $\mathfrak{a} = I({}^a\varphi(V(\mathfrak{a}'))) = \varphi^{-1}(\operatorname{rad}(\mathfrak{a}'))$ を得る. さらに, $\varphi^{-1}(\operatorname{rad}(\mathfrak{a}')) = \operatorname{rad}(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}'))$ であることが分かるので,

$$\overline{{}^a\varphi(V(\mathfrak{a}'))} = V(\mathfrak{a}) = V(\operatorname{rad}(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}'))) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}'))$$

となる. □

**系 3.4**
上の命題の状況で, $f \in A$ とすると,

$$({}^a\varphi)^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$$

が成り立つ．従って, 環準同型 $\varphi\colon A \longrightarrow A'$ に付随する写像 ${}^a\varphi\colon \operatorname{Spec} A' \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ は Zariski 位相について連続である．

以上の議論から, 環 $A$ に対して, そのスペクトラムをとる操作 Spec は環の圏 **Ring** から位相空間の圏 **Top** への反変関手を定めることがわかる．

**命題 3.5**
$\varphi\colon A \longrightarrow A'$ を環準同型で, 任意の $f' \in A'$ が, $f \in A$ と単元 $h \in A'^{\times}$ について $f' = \varphi(f)\cdot h$ となるようなものとする．このとき, $\varphi$ に付随する写像 ${}^a\varphi\colon \operatorname{Spec} A' \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ は単射であり, Zariski 位相についての同相 $\operatorname{Spec} A' \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}^a \varphi \subset \operatorname{Spec} A$ を定める．

**証明** $x, y \in \operatorname{Spec} A'$ で, ${}^a\varphi(x) = {}^a\varphi(y)$ とする．このとき, $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}_x) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}_y)$．ここで $\mathfrak{p}_x = \mathfrak{p}_y$, すなわち $x = y$ を示す．実際, $f' \in \mathfrak{p}_x$ を任意にとり, $f \in A$ と $h \in A'^{\times}$ について, $f' = \varphi(f)\cdot h$ であるとすれば, $\varphi(f) = f' \cdot h^{-1} \in \mathfrak{p}_x$．よって, $f \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p}_x) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}_y)$ であるので, $\varphi(f) \in \mathfrak{p}_y$．従って, $\mathfrak{p}_x \subset \mathfrak{p}_y$ を得る．以上の議論を, $x$ と $y$ の立場を入れ替えて行えば, $\mathfrak{p}_y \subset \mathfrak{p}_x$ も得られ, $x = y$ となる．

また, $\operatorname{Spec} A' \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ が連続であることから, $\operatorname{Spec} A' \longrightarrow \operatorname{im}^a \varphi$ も連続であることは明らか．これが同相であることをいうには, 任意の閉集合 $Y \subset \operatorname{Spec} A'$ に対して, ある閉集合 $Y \subset \operatorname{Spec} A$ が存在し, $Y' = ({}^a\varphi)^{-1}(Y)$ となることをいえば十分である．実際, $E' \subset A'$ について, $Y' = V(E')$ であるとき, $E' \subset \varphi(A)$ となるようにできる．$E \subset A$ について, $E' = \varphi(E)$ とすると, 命題 3.3 の 1. より,

$$Y' = V(E') = V(\varphi(E)) = ({}^a\varphi)^{-1}(V(E)) = ({}^a\varphi)^{-1}(Y)$$

を得る．ただし, $Y = V(E)$ とした． □

**補題 3.6**
$A$ を環, $\mathfrak{a} \subset A$ をイデアルとする．このとき, 自然な全射 $\pi\colon A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ に付随する写像,

$${}^a\pi\colon \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \longrightarrow \operatorname{Spec} A$$

は, 同相,

$$\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} V(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Spec} A$$

を誘導する．このとき, ${}^a\pi$ をスペクトラムの閉埋め込みと呼ぶ．

**証明** 主張は既に示されている．$\operatorname{im}^a \pi = V(\mathfrak{a})$ であることを用いれば, 命題 3.5 からも得られる． □

**補題 3.7**
$A$ を環, $S \subset A$ を乗法系とする．このとき, 自然な全射 $\tau\colon A \longrightarrow A_S$ は, 同相,

$${}^a\tau\colon \operatorname{Spec} A_S \xrightarrow{\sim} \bigcap_{f \in S} D(f) \subset \operatorname{Spec} A$$

を誘導する．$\operatorname{im}{}^a\tau$ が $\operatorname{Spec} A$ で開集合であるとき, ${}^a\tau$ をスペクトラムの開埋め込みという．

**証明** 命題 3.5 から, $\operatorname{im}{}^a\tau = \bigcap_{f\in S} D(f)$ であることを示せばよい. $\tau\colon A \longrightarrow A_S$ は $A_S$ のすべての素イデアルと, $\mathfrak{p}\cap S = \emptyset$ であるような $A$ の素イデアル $\mathfrak{p}$ との間に 1 対 1 対応を誘導するのであった. ここで, $x \in \operatorname{Spec} A$ に対して $S \cap \mathfrak{p}_x = \emptyset$ であるのは, $x \in \bigcap_{f\in S} D(f)$ であるとき, またそのときに限る. よって $\operatorname{im}{}^a\tau = \bigcap_{f\in S} D(f)$ である. □

特に $f \in A$ で, $S = \{1, f, f^2, f^3, \ldots\}$ のとき, $\operatorname{Spec} A_f \xrightarrow{\sim} D(f)$ である.

## 参考文献


[1] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, "*Categories and Sheaves*", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[2] Robin Hartshorne, "*Algebraic Geometry*", Springer, 1977.

[3] Siegfried Bosch, "*Algebraic Geometry and Commutative Algebra*", Springer, 2011.

[4] Ulrich Göertz, Torsten Wedhorn, "*Algebraic Geometry I*", Vieweg + Teubner, 2010.

[5] 上野健爾, 『代数幾何』, 岩波書店, 2005.

[6] 志甫淳, 『層とホモロジー代数』, 共立出版, 2016.